CHAPITRE 3 : Puissance et Energie en Référentiel Galiléen

Les principes de dynamique classique permettent d'étudier le mouvement d'un point matériel soumis à des actions physiques quelconques. Ces lois ne sont cependant pas le seul outil utilisé par le physicien pour étudier un système mécanique : une autre approche, également très efficace fait appel à une autre grandeur, l'énergie. L'étude énergétique d'un système n'apporte pas d'information supplémentaire par rapport aux lois de la dynamique : le bilan énergétique se déduit en effet de la loi de la quantité de mouvement. Mais si l'approche énergétique ne dit rien de fondamentalement nouveau sur le système, elle permettra dans certains cas d'accéder plus rapidement et plus facilement à des résultats intéressants. Dans ce chapitre, nous allons introduire les notions importantes de travail d'une force et d'énergie mécanique.

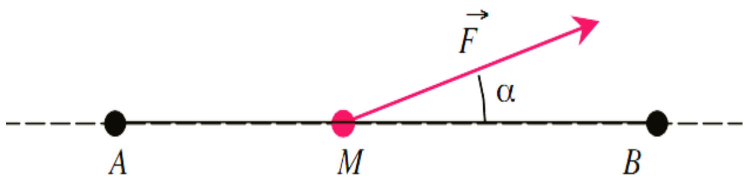
1. Travail d'une force

1.1. Définition

Lorsqu'on applique une force pour déplacer un objet, l'effort qu'il faut fournir est d'autant plus important que la longueur du déplacement est grande et que la force appliquée est intense. Le travail de la force est une grandeur qui va rendre compte de cet effort.

- Cas d'une force constante sur un déplacement rectiligne.

Considérons une force $\vec{F}$ constante (en norme, sens, direction) appliquée sur un point matériel M se déplaçant sur un segment de droite AB



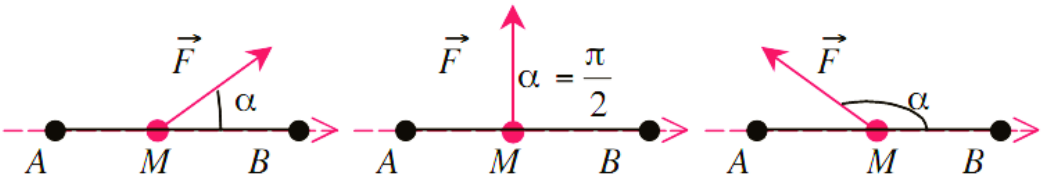
$$\vec{F} = \overrightarrow{cte} \text{ sur } \overrightarrow{AB} \Rightarrow \begin{cases} W_{AB}(\vec{F}) = \vec{F}.\overrightarrow{AB} \\ W_{AB}(\vec{F}) = Fl\cos\alpha \end{cases}$$

α est l'angle que fait le vecteur force $\vec{F}$ avec le déplacement $\overrightarrow{AB}$.

Remarque :

- Parler du travail d'une force n'a de sens que si l'on précise le déplacement. La notation usuelle est la lettre W (initiale du anglais Work signifiant travail).

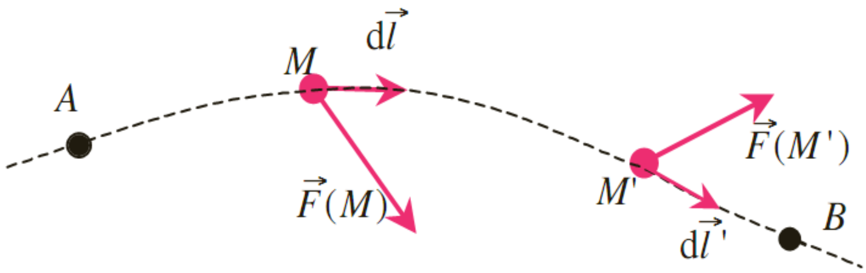
- Le travail s'exprime en $N.m$ c'est-à-dire en joule (J), un joule correspond au travail d'une force de $1\ N$ sur une distance de $1\ m$.



$\alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\alpha > 0$	$\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\alpha = 0$	$\alpha > \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\alpha < 0$
$W_{AB}(\vec{F}) > 0$	$W_{AB}(\vec{F}) = 0$	$W_{AB}(\vec{F}) < 0$
Le travail est moteur	Le travail est nul	Le travail est résistant

1.2. Définition du travail élémentaire

On considère maintenant le cas plus général où la force $\vec{F} = \vec{F}(M)$ est fonction de la position du point d'application M qui se déplace d'un point A vers un point B sur une courbe quelconque.



Pour calculer le travail correspondant de la force il n'est plus possible d'utiliser l'expression $W_{AB}(\vec{F}) = \vec{F}.\overrightarrow{AB}$. La méthode consiste à décomposer le trajet en une succession de déplacements élémentaires $\overrightarrow{dl}$ infiniment petits et rectilignes. L'expression du travail élémentaire sur un tel déplacement élémentaire s'écrit :

$$\boxed{\delta W = \vec{F}(M).\overrightarrow{dl}}$$

Pour obtenir le travail $W_{AB}(\vec{F})$ de la force $\vec{F}(M)$ sur le déplacement de A à B

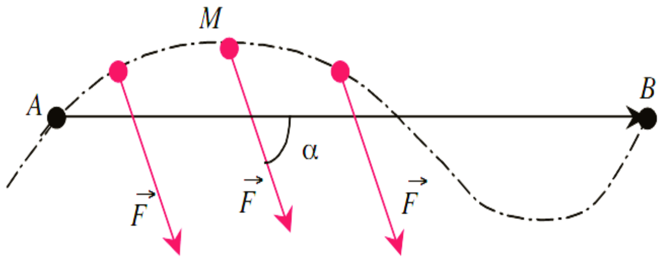
$$\boxed{W_{AB}(\vec{F}) = \int_A^B \delta W(\vec{F}) = \int_A^B \vec{F}(M).\overrightarrow{dl}}$$

1.3. Exemple de calcul du travail d'une force sur trajet AB

1.3.1. Cas d'une force constante sur un trajet quelconque

$$\vec{F} = cte \Longrightarrow W_{AB}(\vec{F}) = \int_A^B \vec{F}(M).\vec{dl} = \vec{F}.\int_A^B \vec{dl}$$

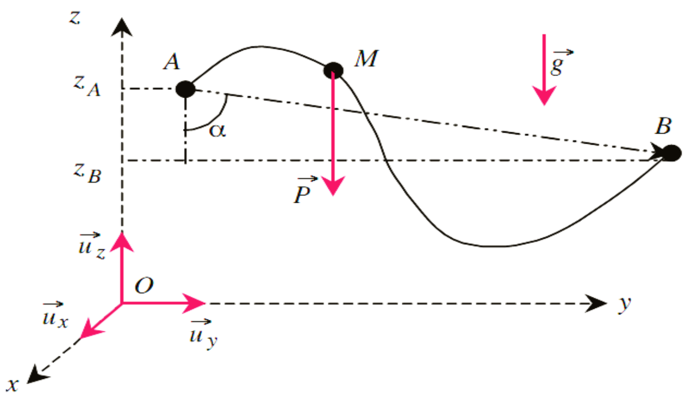
$$\int_A^B \vec{dl} = \vec{AB} \Longrightarrow W_{AB}(\vec{F}) = \vec{F}.\vec{AB} = FAB\cos\alpha$$



Pour tout point M on a $\vec{F}(M) = F$.

1.3.2. Travail du poids d'un corps sur un trajet AB quelconque

Considérons un point M de masse m se déplaçant d'un point A à un point B. Calculons le travail du poids de ce corps au cours de ce déplacement. Le déplacement de A à B est supposé quelconque c'est-à-dire que le chemin qui mène de A à B peut prendre différents trajectoires.



$$\boxed{W_{AB}(\vec{P}) = \vec{P}.\vec{AB}}$$

Le calcul du produit scalaire peut se faire de deux manières :

- en utilisant le cosinus de l'angle α entre $\vec{P}$ et $\vec{AB}$:

$$W_{AB}(\vec{P}) = \vec{P}.\vec{AB} = mgAB\cos\alpha$$

- en utilisant les composantes des vecteurs $\vec{P}$ et $\vec{AB}$ dans la base cartésienne

$$\overrightarrow{AB} = \begin{cases} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{cases} \quad et \quad m\vec{g} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ -mg \end{cases}$$

$$W_{AB}(\vec{P}) = \vec{P}.\overrightarrow{AB} = -mg(z_B - z_A)$$

Les deux résultats sont identiques car $AB\cos\alpha = z_A - z_B$. La différence d'altitude entre le point d'arrivé B et le point de départ A peut s'écrire $\Delta h = z_B - z_A$ on a :

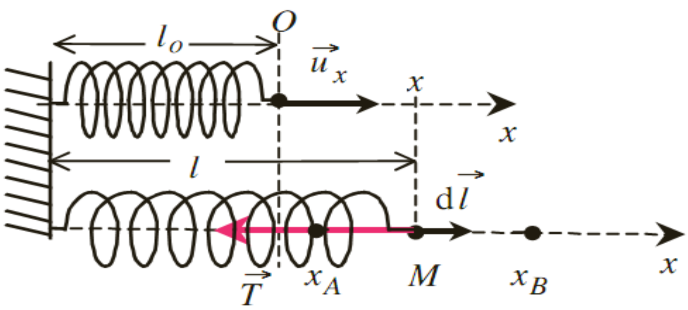
$$W_{AB}(\vec{P}) = -mg(z_B - z_A) = -mg\Delta h$$

Le travail du poids ne dépend pas du chemin suivi mais uniquement de la différence entre le point de départ et d'arrivée :

- Si $\Delta h < 0 \Longrightarrow W_{AB}(\vec{P}) > 0$: le point M descend et le travail du poids est moteur.
- Si $\Delta h > 0 \Longrightarrow W_{AB}(\vec{P}) < 0$: le point M monte et le travail est résistant.

1.3.3. Cas d'une force variable : travail de la tension d'un ressort

Considérons un ressort de raideur k, de longueur au repos l_0 au bout duquel est accrochée une masse m.



La force élastique $\vec{T}$, tension du ressort est une force qui varie avec l'état d'étirement du ressort de raideur k.

$\vec{T} = -k\Delta l\vec{u}_x = -k(l - l_0)\vec{u}_x = -kx\vec{u}_x$

Considérons un point élémentaire $dl = dx\vec{u}_x$ de l'extrémité M du ressort

$\delta W = \vec{T}.\vec{dl} = -kx\vec{u}_x.dx\vec{u}_x = -kxdx$

Le travail de la tension du ressort lorsque le point M passe de l'abscisse x_A à l'abscisse x_B

$$W_{AB}(\vec{T}) = \int_A^B -kxdx = -k\int_A^B xdx = -k\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{x_A}^{x_B} = \frac{1}{2}kx_A^2 - \frac{1}{2}kx_B^2$$

Le travail de cette force ne dépend pas du chemin suivi mais uniquement de la position initiale et finale.

- **Exercice d'application**

Soit une force $\vec{F}$ repérée par ses coordonnées cartésiennes $\vec{F} = 3x\vec{u}_x - 5z\vec{u}_y + 10x\vec{u}_z$ agissant le long de la trajectoire (C) d'équation $y = 2x^2$ et $z = 0$. Montrer qu'entre $x = 0$ et $x = 1$, le travail de $\vec{F}$ est $1{,}5\ J$.

1.4. Puissance d'une force

Un même travail peut être réalisé plus ou moins rapidement. La puissance $\mathcal{P}$ d'une force correspond au travail effectué par cette force par unité de temps et renseigne sur la rapidité avec laquelle le travail (transfert d'énergie) est effectué.

Si W est le travail effectué pendant la durée Δt la puissance moyenne $\mathcal{P}_m$ de la force est donné par :

$$\boxed{\mathcal{P}_m = \frac{W}{\Delta t}}$$

$\mathcal{P}_m$ s'exprime en Watt (W) qui est égal au travail de $1\ J$ effectué en $1\ s$.

Soit δW le travail effectué par une force $\vec{F}$ pendant la durée élémentaire dt

$$\mathcal{P}(t) = \frac{\delta W}{dt} = \frac{\vec{F}.\vec{dl}}{dt} = \vec{F}.\frac{\vec{dl}}{dt} = \vec{F}.\vec{v}$$

La puissance instantanée est donc :

$$\boxed{\mathcal{P}(t) = \vec{F}.\vec{v}}$$

$$\delta W = \mathcal{P}(t)dt = \vec{F}.\vec{v}\,dt \Rightarrow \boxed{W_{AB} = \int_A^B \delta W = \int_{t_A}^{t_B} \vec{F}.\vec{v}\,dt}$$

- **Exercice d'application**

Soit une force $\vec{F}$ repérée par ses coordonnées cartésiennes $\vec{F} = 3x\vec{u}_x - 5z\vec{u}_y + 10x\vec{u}_z$ avec $= t^2 + 1$, $y = 2t^2$ et $z = t^2$. Montrer qu'entre $t_1 = 0$ et $t_2 = 1s$, le travail de $\vec{F}$ est $14{,}5\ J$.

2. L'énergie en mécanique

Deux types d'énergie seront introduits :

- L'énergie cinétique (E_c) liée au mouvement de l'objet

- L'énergie potentielle (E_p) liée à sa position.

L'énergie (E) d'un système est alors définie par la somme des énergies cinétiques et potentielles.

2.1. L'énergie cinétique: une énergie liée au mouvement

Considérons un point matériel G de masse m se déplaçant dans un référentiel galiléen $(\mathcal{R})$ sous l'action d'un ensemble de forces extérieures

$$PFD \Rightarrow \sum \vec{F}_{ext} = m.\vec{a}_G = m\frac{d\vec{v}_G}{dt}$$

$$\sum \delta W = \sum(\vec{F}_{ext}.\vec{dl}) = \left(\sum \vec{F}_{ext}\right).\vec{dl} = m\frac{d\vec{v}_G}{dt}.\vec{dl} = md\vec{v}_G.\frac{\vec{dl}}{dt} = m\vec{v}_G.d\vec{v}_G$$

Considérons maintenant un trajet AB effectué par le point G. En notant $\vec{v}_A$ et $\vec{v}_B$ les vecteurs vitesses de G respectivement au point A et au point B

$$m\int_{v_A}^{v_B} \vec{v}_G.d\vec{v}_G = m\left[\frac{1}{2}v_G^2\right]_{v_A}^{v_B} = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2$$

D'autre part

$$\int_A^B \left(\sum \delta W\right) = \sum \int_A^B (\vec{F}_{ext}.\vec{dl}) = \sum W_{AB}(\vec{F}_{ext})$$

Il vient finalement

$$\boldsymbol{\frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = \sum W_{A\to B}(\vec{F}_{ext})}$$

2.1.1. Définition de l'énergie cinétique

L'énergie cinétique E_C pour un point matériel de masse m se déplaçant à la vitesse $\vec{v}$ dans un référentiel galiléen est :

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2}mv^2}$$

2.1.2. Théorème de la puissance cinétique (TPC)

Dans un référentiel galiléen, la somme des puissances des forces appliquées au point matériel M de masse m se déplaçant à la vitesse $\vec{v}$ est égale à la dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique de ce point matériel :

$$\boxed{\frac{dE_c}{dt} = \sum \mathcal{P}(\vec{F})}$$

2.1.3. Théorème de l'énergie cinétique (TEC)

Dans un référentiel galiléen, la variation d'énergie cinétique d'un point matériel soumis à un ensemble de forces extérieures entre une position A et une position B est égale à la somme des travaux de ces forces entre ces deux points.

$$\boxed{\frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = E_C(B) - E_C(A) = \Delta E_C = \sum W_{A \to B}(\vec{F}_{ext})}$$

2.2. Energie potentielle : une énergie liée à la position

L'énergie potentielle est une forme d'énergie liée à la position du système. En changeant de position, cette énergie peut augmenter (le système emmagasine de l'énergie) ou diminuer (le système restitue de l'énergie à l'extérieur).

2.2.1. Forces conservatives

Ce sont les forces (notées $\vec{F}_{ext}^{C}$) dont le travail ne dépend pas du chemin suivi mais uniquement des positions initiale (point de départ) et finale (point d'arrivée). Exemple: travail du poids, travail de la tension du ressort, travail d'une force constante.

2.2.2. Forces non conservatives

Ce sont toutes les autres forces (notées $\vec{F}_{ext}^{NC}$) dont le travail dépend du chemin suivi. Exemple : les forces de frottements ($W < 0$).

2.2.3. Définition de l'énergie potentielle

Le travail $W_{AB}(\vec{F}_{ext}^{C})$ d'une force conservative $\vec{F}_{ext}^{C}$ ne dépend pas du chemin suivi mais uniquement de l'état initial (état A) et final (état B). Ce travail peut s'exprimer à partir d'une fonction d'état E_P (fonction ne dépendant que de l'état du système) appelée énergie potentielle

$$\boxed{W_{AB}(\vec{F}_{ext}^{C}) = E_P(A) - E_P(B) = -\Delta E_P}$$

La variation de l'énergie potentielle entre deux points A et B est égale à l'opposé du travail de la force conservative entre ces deux points.

- **Définition intégrale de l'énergie potentielle**

$$E_p(B) - E_p(A) = -\int_A^B \vec{F}^C_{ext} . \vec{dl}$$

$$\boxed{\int_A^B \vec{F}^C_{ext} . \vec{dl} = E_p(A) - E_p(B)}$$

➢ **Définition différentielle de l'énergie potentielle**

$$\boxed{\delta W(\vec{F}^C_{ext}) = \vec{F}^c_{ext} . \vec{dl} = -dE_p}$$

➢ **Définition locale de l'énergie potentielle**

$dE_p = \overrightarrow{grad}E_p . \vec{dl} = -\vec{F}^C_{ext} . \vec{dl}$

$\boxed{\vec{F}^C_{ext} = -\overrightarrow{grad}E_p}$

Dans la base cartésienne on a :

$$\boxed{\vec{F}^C_{ext} = -\frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{u}_x - \frac{\partial E_p}{\partial y}\vec{u}_y - \frac{\partial E_p}{\partial z}\vec{u}_z}$$

Dans le cas où E_p ne dépend que d'une seule variable

$\vec{F}^C_{ext} = -\frac{dE_p}{dx}\vec{u}_x$

La force est dirigée vers les énergies potentielles décroissantes.

2.3. Energie potentielle de pesanteur

2.3.1. Expression (méthode intégrale)

$$W_{AB}(\vec{P}) = -mg(z_B - z_A) = mgz_A - mgz_B$$

$$W_{AB}(\vec{F}) = E_p(A) - E_p(B) \Longrightarrow W_{AB}(\vec{P}) = E_{pp}(A) - E_{pp}(B) = -\Delta E_{pp}$$

Lorsque le centre d'inertie se trouve à l'altitude z on peut écrire :

$E_{pp}(z) = mgz + cte$

En choisissant une E_p nulle à l'altitude $z = 0$ on a :

$$\boxed{\begin{cases} E_{pp}(z) = mgz \\ \text{avec } E_{pp}(0) = 0 \\ axe\ \ oz\ \ orienté\ \ vers\ le\ haut \end{cases}}$$

Si l'axe oz est orienté vers le bas (axe vertical descendant)

$\boxed{E_{PP}(z) = -mgz}$

2.3.2. Expression (méthode différentielle)

$\delta W(\vec{P}) = m\vec{g}.\overrightarrow{dl}$

En considérant un repère $R(o,x,y,z)$ avec un axe oz vertical orienté vers le haut

$\partial W(\vec{P}) = -mg\vec{u}_z.(dx\,\vec{u}_x + dy\,\vec{u}_y + dz\,\vec{u}_z) = -mgd_z = -d(mgz) = -d(E_{PP})$

$\boldsymbol{E_{PP} = mgz + cte}$

On retrouve la même expression que précédemment.

2.3.3. Interprétation de l'énergie potentielle de pesanteur

Pour amener une masse d'une altitude $z = 0$ à une altitude, il faut qu'un opérateur exerce une force $\vec{F}_{OP}$ au juste égale et opposée au poids

$\vec{F}_{OP} = -\vec{P}$

Le travail que l'opérateur va fournir est donc

$$W_{0\to z}(\vec{F}_{OP}) = \int_0^z \vec{F}_{OP}.\overrightarrow{dl} = \int_0^z -\vec{P}.\overrightarrow{dl} = -W_{0\to z}(\vec{P})$$

$$W_{0\to z}(\vec{F}_{OP}) = -[E_{PP}(0) - E_{PP}(z)] = E_{PP}(z) = mgz$$

L'énergie potentielle de la masse à l'altitude z correspond donc à l'énergie qu'un opérateur (l'extérieur du système) a fournie pour l'amener à cette altitude. La masse a emmagasiné cette énergie qu'elle pourra restituer en tombant.

2.4. Energie potentielle élastique

2.4.1. Méthode intégrale

$$W_{AB}(\vec{T}) = \frac{1}{2}kx_A^2 - \frac{1}{2}kx_B^2$$

$$\Longrightarrow W_{AB}(\vec{T}) = E_{PE}(A) - E_{PE}(B) = -\Delta E_{PE}$$

$$E_{PE}(x) = \frac{1}{2}kx^2 + cte$$

Pour une déformation nulle $E_{PE}(0) = 0$ on a:

$$\boxed{\begin{array}{l} \boldsymbol{E_{PE}(x) = \frac{1}{2}kx^2} \\ \textbf{Allongement } \boldsymbol{x = \Delta l = l - l_0} \end{array}}$$

2.4.2. Méthode différentielle

$\delta W(\vec{T}) = \vec{T}.\vec{dl}$

$\vec{T} = -k\Delta l\vec{u}_x = -kx\,\vec{u}_x \quad et \quad \vec{dl} = dx\,\vec{u}_x$

$\Longrightarrow \delta W(\vec{T}) = \vec{T}.\vec{dl} = -kxdx = -d(\frac{1}{2}kx^2) = -d(E_{PE})$

$\boldsymbol{E_{PE} = \frac{1}{2}kx^2 + cte}$

On retrouve la même expression que précédemment.

2.5. Energie potentielle d'interaction gravitationnelle

Supposons que se trouve en O un point de masse m_0 et en M un point matériel de masse m. M est soumis à la force d'interaction gravitationnelle :

$\vec{F}_g = -G\frac{m_0 m}{r^2}\vec{u}_r$

F_g est la force en Newton (N) ; G : constante de gravitation universelle $(G = 6{,}67\ 10^{-11}\mathrm{Nm^2kg^{-2}})$; r : distance OM.

Cette force est constamment dirigée vers O (elle est attractive). Elle est de plus conservative.

$\vec{F}^{C}_{ext} = -\overrightarrow{grad}E_p \Longrightarrow \vec{F}_g = -\frac{dE_p(r)}{dr}\vec{u}_r = -G\frac{m_0 m}{r^2}\vec{u}_r \Longrightarrow E_p(r) = -G\frac{m_0 m}{r} + cte$

L'énergie potentielle d'interaction gravitationnelle est :

$\boldsymbol{E_p(r) = -G\frac{m_0 m}{r} + cte}$

Si on choisit la référence de l'énergie potentielle à l'infini on a :

$E_p(r \longrightarrow \infty) = 0 \Longrightarrow cte = 0 \Longrightarrow \boldsymbol{E_p(r) = -G\frac{m_0 m}{r}}$

2.6. Energie potentielle d'interaction électrostatique

Supposons que se trouve en O une charge électrique ponctuelle q_0 et en M une charge électrique q. M est soumis à la force d'interaction électrostatique :

$\vec{F}_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0 q}{r^2}\vec{u}_r$

F_e est la force en Newton (N) ; ε_0 : permittivité du vide $(\varepsilon_0 = 8{,}85\ 10^{-12}\mathrm{F.m^{-1}})$; r : distance OM.

Cette force est constamment dirigée vers O (elle est attractive si q et q_0 sont de signe opposé et elle est répulsive si q et q_0 sont de même signe). Elle est de plus conservative.

$$\vec{F}^{C}_{ext} = -\overrightarrow{grad}E_p \Rightarrow \vec{F}_e = -\frac{dE_p(r)}{dr}\vec{u}_r = +\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0 q}{r^2}\vec{u}_r \Rightarrow E_p(r) = +\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0 q}{r} + cte$$

L'énergie potentielle d'interaction électrostatique est :

$$\boldsymbol{E_p(r) = +\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0 q}{r} + cte}$$

Si on choisit la référence de l'énergie potentielle à l'infini on a :

$$E_p(r \longrightarrow \infty) = 0 \Rightarrow cte = 0 \Rightarrow \boldsymbol{E_p(r) = +\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0 q}{r}}$$

2.7. Force conservatrice et énergie potentielle

Il est possible connaissant l'expression de l'énergie potentielle E_p de retrouver l'expression de la force $\vec{F}^{C}_{ext}$ qui en dérive

$$\boxed{\begin{gathered}\vec{F}^{C}_{ext} = -\overrightarrow{grad}\, E_p \\ \overrightarrow{grad}E_p = \frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial E_p}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial E_p}{\partial z}\vec{u}_z\end{gathered}}$$

- **Application 1** : cas du poids et de l'énergie potentielle de pesanteur

  Avec un axe vertical ascendant $E_{PP} = mgz$

$$\vec{P} = -\overrightarrow{grad}E_p = -\frac{\partial E_{PP}}{\partial x}\vec{u}_x - \frac{\partial E_{PP}}{\partial y}\vec{u}_y - \frac{\partial E_{PP}}{\partial z}\vec{u}_z = -\frac{dE_{PP}}{dz}\vec{u}_z$$

$$\vec{P} = -\frac{d(mgz)}{dz}\vec{u}_z = -mg\vec{u}_z$$

- **Application 2** : cas de la tension d'un ressort et de l'énergie potentielle élastique

  Avec x l'allongement on a $E_{PE} = \frac{1}{2}kx^2$

$$\vec{T} = -\overrightarrow{grad}E_{PE} = -\frac{\partial E_{PE}}{\partial x}\vec{u}_x - \frac{\partial E_{PE}}{\partial y}\vec{u}_y - \frac{\partial E_{PE}}{\partial z}\vec{u}_z = -\frac{dE_{PE}}{dx}$$

$$\vec{T} = -\frac{d(\frac{1}{2}kx^2)}{dx}\vec{u}_x = -kx\vec{u}_x$$

2.8. Energie mécanique

2.8.1. Définition de l'énergie mécanique

L'énergie mécanique d'un système est égale à la somme des énergies cinétique et potentielle. C'est une fonction d'état

$$\boxed{E = E_C + E_P}$$

2.8.2. Théorème de l'énergie mécanique (TEM)

La variation d'énergie mécanique d'un système entre deux points A et B est égale à la somme des travaux des forces non conservatives appliquées au système entre ces deux points :

$$\boxed{\Delta E = E(B) - E(A) = \sum W_{A\to B}(\vec{F}_{ext}^{NC})}$$

Les forces non conservatives étant des forces résistantes $(W < 0)$ l'énergie mécanique d'un système ne peut que diminuer au cours du temps.

- **Le théorème de l'énergie mécanique pour un système conservatif :**

  L'énergie mécanique d'un système conservatif (ou mécaniquement isolé) se conserve au cours du temps

  Système conservatif équivaut à $E = E_C + E_p = E_0 = constante$

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{dE}{dt} = 0}$$

Ceci constitue le principe de conservation de l'énergie mécanique. $E = cte$ est appelée intégrale première de l'énergie mécanique puisqu'elle relie les dérivées premières des coordonnées par rapport au temps.

2.8.3. Théorème de la puissance mécanique

La dérivée temporelle de l'énergie mécanique est égale à la puissance des forces non conservatives :

$$\boxed{\frac{dE}{dt} = \sum \mathcal{P}(\vec{F}_{ext}^{NC})}$$

3. Etats liés et stabilité d'un système mécaniquement isolé

3.1. Les états liés

Lorsqu' un système est conservatif, son énergie mécanique se conserve. On a donc pour un tel système

$E = E_C + E_p = cte$

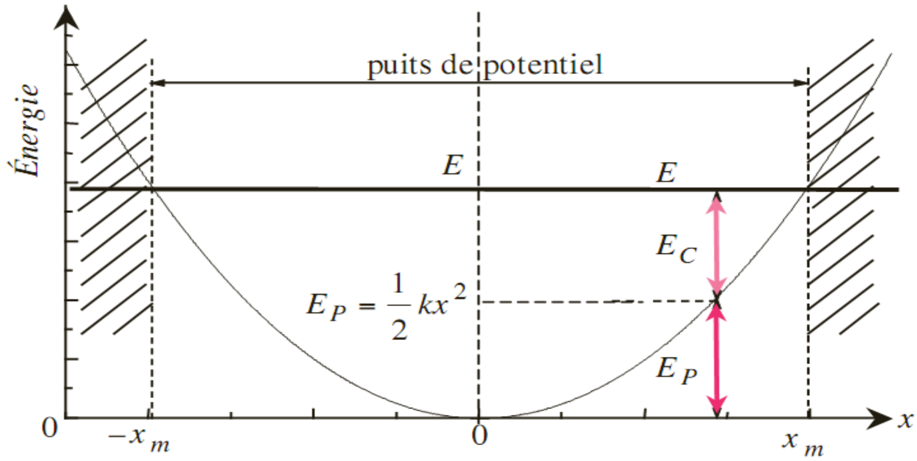
Les états liés du système sont définis par :

$$\boxed{E_C = \frac{1}{2}mv^2 > 0 \implies E - E_p > 0}$$

Application : Masse accroché à un ressort

Les états liés du système sont

$$E - \frac{1}{2}kx^2 \geq 0 \implies -\sqrt{2E/k} = -x_m \leq x \leq \sqrt{2E/k} = x_m$$



Les valeurs de x en dehors de cet intervalle sont inaccessibles au système : on dit que le système est enfermé dans un puits de potentiel.

3.2. Stabilité d'un système soumis à une force conservative

Dans le cas $\vec{F} = -\overrightarrow{grad}E_p$ ou l'énergie potentielle ne dépend que d'une variable x

$$\vec{F} = -\frac{dE_p}{dx}\vec{u}_x \implies F = -\frac{dE_p}{dx}$$

La condition d'équilibre se traduit par $\vec{F} = \vec{0} \implies dE_p/dx = 0$

Une position d'équilibre se traduit donc par un extremum de la fonction d'énergie potentielle.

Un équilibre est stable si à la suite d'une perturbation qui a éloigné le système de cette position, celui-ci y retourne spontanément. Dans le cas contraire l'équilibre est instable.

- S'il existe un équilibre stable pour $x = x_0$ alors $E_p(x)$ est minimale pour $x = x_0$ on a donc: **Équilibre stable pour**

$$\boxed{x = x_0 \implies \frac{dE_P}{dx}(x_0) = 0 \ \ et \ \ \frac{d^2E_P}{dx^2}(x_0) > 0}$$

- S'il existe un équilibre instable pour $x = x_0$ alors $E_p(x)$ est maximale pour $x = x_0$ on a donc: **Équilibre instable pour**

$$\boxed{x = x_0 \Longrightarrow \frac{dE_P}{dx}(x_0) = 0 \quad et \quad \frac{d^2E_P}{dx^2}(x_0) < 0}$$

Un système livré à lui-même évolue donc spontanément vers un état d'équilibre qui correspond à une position pour laquelle l'énergie potentielle est minimale.